TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL E TEOREMA DE BAYES

Vimos até agora que por meio de probabilidade condicional P(A | B) calculamos a chance do evento A ocorrer dado que o evento B ocorreu no experimento.

Também podemos estar interessados em calcular a chance do evento A ocorrer dada a *suposição de que B venha a ocorrer*. Para isso pode ser usado o chamado *Teorema de Bayes*.

Exemplo:

Considere o experimento de retirar uma ficha de duas possíveis urnas: urna I ou urna II. A urna I contém contém 3 fichas vermelhas e 2 azuis, e a urna II contém 2 vermelhas e 3 azuis. Joga-se uma moeda honesta. Se a moeda der cara, extrai-se uma ficha da urna I; se coroa , extrai-se uma ficha da urna II.

(a) Considere que uma ficha vermelha foi extraída. Qual a probabilidade de ter saído cara no lançamento?

(b) Considere que uma ficha azul foi extraída. Qual a probabilidade de ter saído coroa no lançamento?

Resolução (a):

Considere os eventos:

A_1 = { escolher a urna I}; A_2 = { escolher a urna II}; B = { extrair ficha vermelha}; B'={extrair ficha azul}

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1).P(B/A_1)}{???} = \frac{1/2.3/5}{???}$$

Como calcular P(B) ??? (VIDE LOUSA) --→ Veja Teorema da Probabilidade Total

Teorema da Probabilidade Total: Sejam $A_1, A_2,.....,A_n$ eventos *mutuamente disjunstos (ou seja,* $A_i \cap A_j = \Phi$ *, $i \neq j$)* e que unidos formam o espaço amostral Ω. Seja B um evento qualquer de Ω. Então P(B) pode ser calculada por:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)$$

Representação pelo Diagrama de Venn **(VIDE LOUSA)**

Demonstração: **(VIDE LOUSA)**

Teorema de Bayes: Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos *mutuamente disjunstos* e que unidos formam o espaço amostral Ω. Seja B um evento qualquer de Ω. Então:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)}, \quad \text{qualquer } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demonstração:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} =^{*} \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)}, \quad \text{qualquer } i = 1, 2, \ldots, n.$$

*usamos o Teorema do Produto (numerador) e Teorema da Probabilidade Total (denominador).

OBSERVAÇÃO:

Um meio gráfico denominado *diagrama de árvore* pode ajudar na solução de um problema envolvendo o Teorema da Probabilidade Total e o Teorema de Bayes: este diagrama representa graficamente todas os resultados possíveis do experimento. Veja:

Exemplos:

1. O Teorema de Bayes também é utilizado para atualizar a probabilidade de ocorrência de um evento (A) com base em novas evidências (B).

Exemplo de Aplicação à Eng. civil: **Avaliação da Integridade Estrutural de uma Ponte**

Você é o engenheiro civil encarregado de avaliar a integridade estrutural de uma ponte. Você está particularmente interessado na probabilidade de a ponte estar em boas condições (A).

Suponha que você possua alguma informação prévia sobre a probabilidade de uma ponte estar em boas condições ($P(A)$) antes de qualquer inspeção detalhada. Isso pode ser baseado em dados históricos, registros de manutenção, ou a experiência passada com estruturas semelhantes.

Durante uma inspeção visual, você observa a ausência de rachaduras visíveis (B), o que é uma boa indicação de que a ponte está em boas condições.

A aplicação do Teorema de Bayes permite calcular a probabilidade atualizada da ponte estar em boas condições, dado que não há rachaduras visíveis, P(A|B).

Vamos considerar alguns valores hipotéticos para as probabilidades, lembrando que na prática esses valores podem ser baseados em dados históricos, análises estruturais, experiência profissional, entre outros.

- $P(A)$: A probabilidade prévia de que uma ponte esteja em boas condições antes de qualquer inspeção detalhada. Vamos assumir que seja 0,90, indicando uma alta confiança com base em dados históricos e manutenção regular.
- $P(B|A)$: A probabilidade de não haver rachaduras visíveis dado que a ponte está em boas condições. Suponhamos que seja 0,95, indicando que uma ponte em boas condições tem uma alta probabilidade de não apresentar rachaduras visíveis.
- $P(B|A')$: A probabilidade de não haver rachaduras visíveis dado que a ponte não está em boas condições. Suponhamos que seja 0,20, indicando que mesmo em uma ponte danificada, ainda existe uma chance significativa de não ter rachaduras visíveis.

Agora, podemos usar o Teorema de Bayes para calcular $P(A|B)$:

A fórmula é:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{0.95 \text{ x } 0.9}{?} = \frac{0.95 \text{ x } 0.9}{0{,}875} \approx 0{,}977$$

$P(B)$ foi calculado usando o Teorema da probabilidade total:

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A') \cdot P(A') = (0{,}95 \text{ x } 0{,}90) + (0{,}20 \text{ x } 0{,}10) = 0{,}875$$

A expressão acima é ilustrada pelo Diagrama de árvore a seguir:

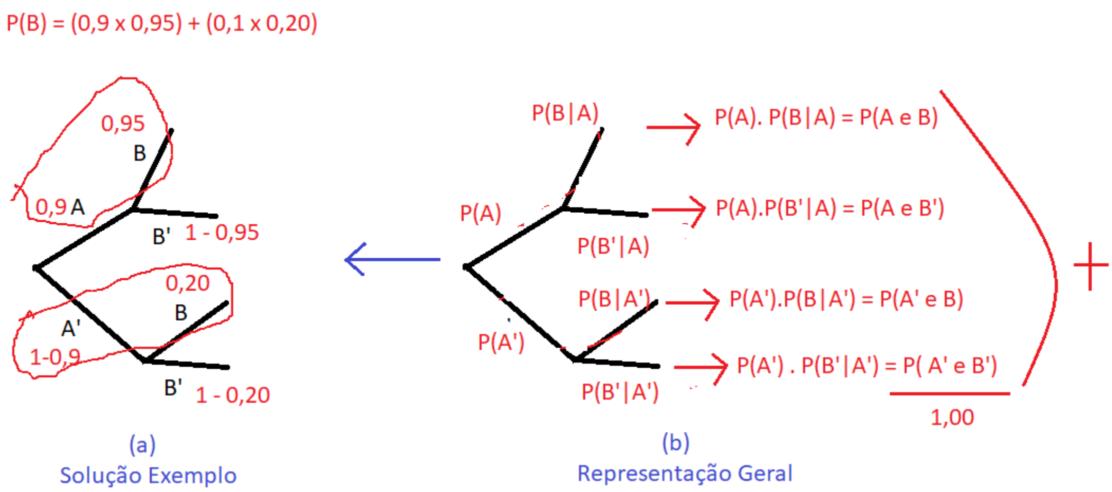

FIGURA: Representação do Teorema da Probabilidade Total em Diagrama de Árvore para o Exemplo 1.

2. Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza da fazenda F1, 30% de outra fazenda F2 e 50% de uma terceira fazenda F3. Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas e verificou que 20% do leite produzido por F1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F2 e F3 esta proporção era de 5% e 2% respectivamente. Na fábrica de sorvetes os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação da origem da fazenda. Para um galão de leite, escolhido ao acaso do refrigerador, calcule:

a) a probabilidade do leite deste galão estar adulterado por adição de água? (resp: 0,065)

b) a probabilidade do leite deste galão ter vindo da fábrica F1, conhecido que este galão está adulterado por adição de água? E ter vindo da fábrica F2? E da fábrica F3? (resp: 0,615 ; 0,231 ; 0,1538)

3. Os candidatos a vagas de uma empresa passam por um curso de treinamento, administrado por uma consultoria, por uma semana. Ao final do curso eles foram submetidos a uma prova: 25% dos candidatos foram classificados como bons(B), 50% como médios (M) e os outros 25% como fracos (F). Porém no futuro a empresa irá substituir o processo de seleção: ela própria irá aplicar um teste a seus candidatos, tal teste admite os resultados “Aprovado” (A) ou “Reprovado” (R).

Considere conhecidas as probabilidades: $P(A \mid B) = 0{,}8$ $P(A \mid M) = 0{,}50$ $P(A \mid F) = 0{,}20$.

a) Qual a probabilidade de um funcionário escolhido ao acaso dos que participaram do treinamento , ao fazer o teste da empresa ser reprovado? (resp: 0,5)

b) Qual a probabilidade de um funcionário, escolhido ao caso entre os que participaram do curso de treinamento, ter sido classificado como fraco pela consultoria dado que ele será aprovado no teste da empresa? (resp: 0,1)

Exercícios:

1) Resolução do item (b) para o exemplo das urnas e das fichas destas notas de aula.
2) Durante a construção de um edifício, testes de qualidade do concreto são realizados para verificar se a resistência do concreto atende aos padrões especificados. A probabilidade prévia de que o concreto seja realmente de alta qualidade, sem considerar resultados de testes, é de 0,70. A probabilidade de que os testes indiquem alta qualidade quando o concreto é de fato de alta qualidade é de 0,90, enquanto a probabilidade de que os testes indiquem alta qualidade mesmo quando o concreto não é de alta qualidade é de 0,20. Determine a probabilidade atualizada de o concreto ser de fato de alta qualidade, dado que os testes indicaram alta qualidade. (resp ≈ 0,969).

3) Sejam duas caixas com cartas numeradas. A caixa “A” tem 9 cartas numeradas de 1 a 9. A caixa B tem 5 cartas numeradas de 1 a 5. Uma caixa é escolhida ao acaso e uma carta é retirada. Retirado um número par, qual a probabilidade de que a carta sorteada:

(a) Tenha vindo de A?

(b) Tenha vindo de B?

4) Uma companhia produz circuitos em três fábricas, I, II e III. A fábrica I produz 40% dos circuitos, enquanto a II e a III produzem 30% cada um. As probabilidades de que um circuito integrado produzido por essas fábricas não funcione são 0.01, 0.04, 0.03, respectivamente. Escolhido um circuito da produção conjunta das três fábricas, qual é a probabilidade do mesmo não funcionar?

5) Considere a situação do problema anterior, mas suponha agora que um circuito escolhido ao acaso seja defeituoso. Determine qual é a probabilidade dele ter sido fabricado por I.